PART3　直方体の切り口

例題

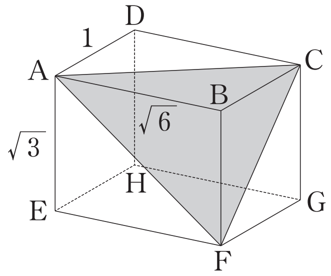
右の図のような

$AB=\sqrt{6}$，$AD=1$，$AE=\sqrt{3}$

である直方体 ABCD−EFGH がある。

(1)　△AFC の面積を求めよ。

(2)　頂点 B から △AFC に下ろした垂線を BI とする。
BI の長さを求めよ。



Point Pickup

練習

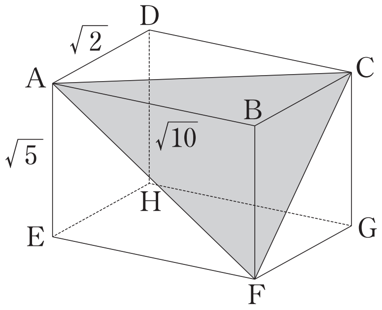
右の図のような

$$\mathrm{AB}=\sqrt{10},\ \mathrm{AD}=\sqrt{2},\ \mathrm{AE}=\sqrt{5}$$

である直方体 ABCD−EFGH がある。

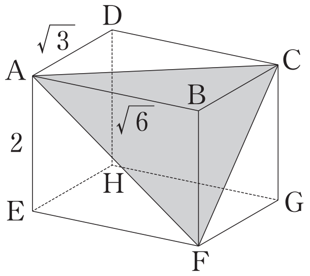
(1)　△AFC の面積を求めよ。

(2)　頂点 B から △AFC に下ろした垂線を BI とする。BI の長さを求めよ。



第 12 講　PART3　確認問題

右の図のような，$AB=\sqrt{6}$，$AD=\sqrt{3}$，$AE=2$ である直方体 ABCD−EFGH がある。



1　△AFC の面積 S を求めよ。

$$S=\frac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$$

2　頂点 B から △AFC に下ろした垂線を BI とする。BI の長さを求めよ。

$$BI=\frac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$$

PART3　直方体の切り口

例題

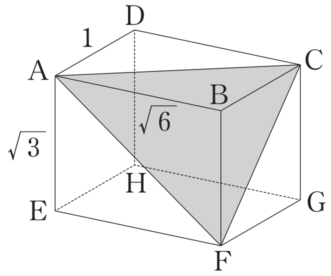
右の図のような

$AB=\sqrt{6}$，$AD=1$，$AE=\sqrt{3}$

である直方体 ABCD−EFGH がある。

(1)　△AFC の面積を求めよ。

(2)　頂点 B から △AFC に下ろした垂線を BI とする。BI の長さを求めよ。



(1)　三平方の定理より

$$AC=\sqrt{(\sqrt{6})^2+1^2}=\sqrt{7}$$

$$AF=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3})^2}=3$$

$$CF=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$$

△AFC において余弦定理より

$$\cos\angle CAF=\frac{(\sqrt{7})^2+3^2-2^2}{2\cdot\sqrt{7}\cdot3}=\frac{12}{2\cdot\sqrt{7}\cdot3}=\frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\sin\angle CAF=\sqrt{1-\cos^2\angle CAF}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

よって　$\triangle AFC=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AF\cdot\sin\angle CAF=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(2)　四面体 BAFC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle BFC\cdot AB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$V=\frac{1}{3}\triangle AFC\cdot BI$ より　$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times BI$

よって　$BI=\frac{\sqrt{6}}{3}$

練習

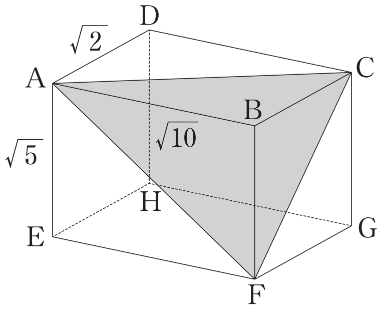
右の図のような

$AB=\sqrt{10}$，$AD=\sqrt{2}$，$AE=\sqrt{5}$

である直方体 ABCD−EFGH がある。

(1)　△AFC の面積を求めよ。

(2)　頂点 B から △AFC に下ろした垂線を BI とする。BI の長さを求めよ。



(1)　三平方の定理より

$$AC=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{10})^2}=2\sqrt{3}$$

$$AF=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{10})^2}=\sqrt{15}$$

$$CF=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{7}$$

△AFC において余弦定理より

$$\cos\angle CAF=\frac{(\sqrt{15})^2+(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot\sqrt{15}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{20}{2\cdot\sqrt{3}\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{5}{3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin\angle CAF=\sqrt{1-\cos^2\angle CAF}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$$

よって　$\triangle AFC=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AF\cdot\sin\angle CAF=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}\cdot\frac{2}{3}=2\sqrt{5}$

(2)　四面体 BAFC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle BFC\cdot AB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\times\sqrt{10}=\frac{5}{3}$$

$V=\frac{1}{3}\triangle AFC\cdot BI$ より　$\frac{5}{3}=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{5}\times BI$

よって　$BI=\frac{\sqrt{5}}{2}$

第 12 講　PART3　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：3，イ：6，ウ：2

[解説]

三平方の定理より

$$AC=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3})^2}=3$$

$$AF=\sqrt{(\sqrt{6})^2+2^2}=\sqrt{10}$$

$$CF=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$$

△AFC において余弦定理より

$$\cos\angle CAF=\frac{3^2+(\sqrt{10})^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot3\cdot\sqrt{10}}$$

$$=\frac{9+10-7}{2\cdot3\cdot\sqrt{10}}=\frac{12}{2\cdot3\cdot\sqrt{10}}=\frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\sin\angle CAF=\sqrt{1-\cos^2\angle CAF}$$

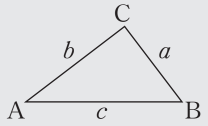
$$=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$$

よって △AFC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{10}\cdot\sin\angle CAF$$ **[A]**

$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}=\mathbf{\frac{3\sqrt{6}}{2}}$$

[A]　三角形の面積



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

2 [正解] エ：2，オ：3，カ：3

[解説]

$\triangle \mathrm{AFC}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ より，四面体 BAFC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle \mathrm{BFC}\cdot \mathrm{AB}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\times\sqrt{6}=\sqrt{2}$$

[B]

$V=\dfrac{1}{3}\triangle \mathrm{AFC}\cdot \mathrm{BI}$ より　$\sqrt{2}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\cdot \mathrm{BI}$

よって　$\mathrm{BI}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

[B]
四面体に含まれる三角形に注目する。
四面体 BAFC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle \mathrm{BFC}\cdot \mathrm{AB}=\frac{1}{3}\triangle \mathrm{AFC}\cdot \mathrm{BI}$$

などと表される。